

ΑΓΜΑ (MEM-100) – Φυλλάδιο Ασκήσεων 6

Άσκηση 1. Να βρείτε τα μήκη των αξόνων, τις εστίες και την εκκεντρότητα των ελλείψεων:

(i) $x^2 + 4y^2 = 4$

(ii) $169x^2 + 144y^2 = 24336$.

Άσκηση 2. Να εγγράψετε στην έλλειψη $4x^2 + y^2 = 4$ τετράγωνο με πλευρές παράλληλες προς τους άξονες x, y .

Άσκηση 3. Αν E', E είναι οι εστίες και $B'B$ ο μικρός άξονας της έλλειψης $x^2 + 2y^2 = 4$, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $EBB'E'$ είναι τετράγωνο.

Άσκηση 4. Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων της έλλειψης $3x^2 + y^2 = 4$, οι οποίες:

(i) είναι παράλληλες προς την ευθεία $y = -3x + 1$

(ii) είναι κάθετες στην ευθεία $y = \frac{1}{2}x$

(iii) διέρχονται από το σημείο $M(0, 4)$.

Άσκηση 5. Έστω έλλειψη $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Αν η εφαπτομένη της στο σημείο $M(x_0, y_0)$ τέμνει τους άξονες x, y στα σημεία $A(p, 0)$ και $B(0, q)$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι $\frac{a^2}{p^2} + \frac{b^2}{q^2} = 1$.

Άσκηση 6. Να αποδείξετε ότι το σημείο $M(\frac{a(1-t^2)}{1+t^2}, \frac{2bt}{1+t^2})$ ανήκει στην έλλειψη $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ για όλες τις τιμές του $t \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 7. Να αποδείξετε ότι το σημείο τομής των ευθειών

$$ay = \lambda b(a + x), \quad \lambda ay = b(a - x), \quad 0 < b < a,$$

ανήκει στην έλλειψη $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ για όλες τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

Άσκηση 8. Να βρείτε τις εστίες, την εκκεντρότητα και τις ασύμπτωτες της υπερβολής:

(i) $9x^2 - 16y^2 = 144$

(ii) $x^2 - y^2 = 4$

(iii) $144x^2 - 25y^2 = 3600$.

Άσκηση 9. Αν η εφαπτομένη της υπερβολής $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ στην κορυφή $A(a, 0)$ τέμνει την ασύμπτωτη $y = \frac{b}{a}x$ στο σημείο Γ , να αποδείξετε ότι $OE = O\Gamma$.

Άσκηση 10. Να αποδείξετε ότι κάθε ευθεία ε που είναι παράλληλη σε ασύμπτωτη της $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ τέμνει την υπερβολή σε ένα μόνο σημείο. Βρείτε το σημείο τομής για $a = \frac{1}{2}$, $b = 1$ και $\varepsilon: 2x - y = 1$.

Άσκηση 11. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της υπερβολής $x^2 - 4y^2 = 12$ οι οποίες:

(i) είναι παράλληλες προς την ευθεία $y = x + 1$

(ii) είναι κάθετες στην ευθεία $y = -\frac{4}{\sqrt{3}}x$

(iii) διέρχονται από το σημείο $M(3, 0)$.